A 2009 MATH. II MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2009

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE ParisTech, ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Théorème de Müntz

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels $\geqslant 0$ deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La question préliminaire et les parties A, B, C et D
sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1) Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

A. Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X + b_k)}.$$

2) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

3) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

5) Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_n d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V de *dimension finie* de E, et on note $B = \{y\,;\, \|y - x\| \leq \|x\|\}$.

6) Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.

7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de *dimension finie* de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n) \end{pmatrix}.$$

9) Montrer que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0,1])$ on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2, respectivement. Pour $f \in C([0,1])$ la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

11) Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $N_2(f) \leqslant N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$ on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1])\ ; f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

12) Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.

14) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15) Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.

16) En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geqslant 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geqslant 0$.

18) Montrer que pour tout $\mu \geqslant 0$,
$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

19) Montrer que pour tout $\mu \geqslant 0$, la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) Montrer que si W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, alors la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. Montrer que si $\lambda_k \geqslant 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors pour tout $\mu \geqslant 1$, on a :
$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leqslant N_2\big(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k - 1}\big).$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :
$$\begin{cases} (i): & \lambda_0 = 0 \\ (ii): & \lambda_k \geqslant 1 \text{ pour tout } k \geqslant 1. \end{cases}$$
Montrer que sous ces conditions, si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

24) Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :
$$(ii') : \quad \inf_{k \geqslant 1} \lambda_k > 0.$$

FIN DU PROBLÈME