

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2009
Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée
INSEA

Concours National Commun
d'Admission aux
Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées
Session 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière PSI

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière **PSI**,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est **interdit**.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à p lignes et q colonnes ; si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, tM désigne la matrice transposée de M et $\text{rg}(M)$ son rang.

Pour tout entier naturel k , \mathcal{P}_k désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leq k$.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et x_0, x_1, \dots, x_n des réels **deux à deux distincts** ; on note π le polynôme $\pi = (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_n)$.

Enfin, pour tout entier naturel m , on définit l'application

$$\begin{aligned} f_m : \mathcal{P}_m &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

1^{ère} Partie : Étude de l'application f_m

Sot m un entier naturel.

1. Si $R \in \mathcal{P}_n$ est tel que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $R(x_i) = 0$, montrer que R est le polynôme nul.
2. Vérifier que f_m est une application linéaire.
3. Dans cette question, on suppose que $m \geq n + 1$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker } f_m = \{Q\pi ; Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$; on pourra effectuer une division euclidienne.
 - (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } f_m$ et \mathcal{P}_n sont supplémentaires dans \mathcal{P}_m .
 - (c) En déduire la dimension de $\text{Ker } f_m$ puis en donner une base.
 - (d) Déterminer le rang de f_m ; l'application f_m est-elle surjective ?
4. Dans cette question, on suppose que $m \leq n$.
 - (a) Montrer que f_m est injective.
 - (b) Quel est le noyau de f_m ? Quel est son rang ?
 - (c) À quelle condition sur les entiers n et m l'application f_m est-elle surjective ?
5. On définit les polynômes L_0, L_1, \dots, L_n par $L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- (a) Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, quel est le degré de L_i ? Vérifier que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ avec $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.
- (b) Calculer $f_n(L_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Que représente la famille $(f_n(L_0), f_n(L_1), \dots, f_n(L_n))$ pour l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} ?
- (c) Montrer que la famille (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de \mathcal{P}_n .
- (d) Soit $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.
 - Exprimer le polynôme P_y en fonction de L_0, L_1, \dots, L_n et y_0, y_1, \dots, y_n .

2^{ème} Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels y_0, y_1, \dots, y_n qui sont respectivement les images des réels x_0, x_1, \dots, x_n par une fonction φ , et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) := \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale λ_m de ladite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction φ aux points x_0, x_1, \dots, x_n ; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle de qualité.

A. Étude dans le cas $m \geq n + 1$

- Donner un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$. Que vaut $\Phi_m(Q_0)$?
- En déduire la valeur minimale λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit \mathcal{P}_m , et préciser à l'aide de Q_0 et $\text{Ker } f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

B. Étude dans le cas $m \leq n$

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1, m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1, 1}(\mathbb{R}).$$

- Montrer que si $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(M + N) = {}^tM + {}^tN$ et que, si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(M'N') = {}^tN' {}^tM'$; p, q et r étant des entiers naturels non nuls.

- Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1, 1}(\mathbb{R})$; on lui associe le polynôme $P_v \in \mathcal{P}_m$ défini par $P_v(x) = \sum_{k=0}^m v_k x^k$.

- Calculer le produit Av et l'exprimer à l'aide des valeurs prises par P_v aux points x_0, x_1, \dots, x_n .
- Montrer alors que si $Av = 0$ alors $v = 0$.

3. Soit $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$; calculer le produit scalaire ${}^t u u$ en fonction de u_0, u_1, \dots, u_n puis en déduire que ${}^t u u \geq 0$ et que ${}^t u u = 0$ si et seulement si $u = 0$.
4. (a) Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t A A v = 0$; on pose $u = A v$. Calculer ${}^t u u$, en déduire que $A v = 0$ puis que $v = 0$.
 (b) Déterminer le rang de la matrice ${}^t A A$ et justifier qu'elle est inversible.
 (c) Expliciter les coefficients de la matrice ${}^t A A$ en fonction de x_0, x_1, \dots, x_n .
5. On pose $M = {}^t A A$ et $c = {}^t A b$; justifier que le système linéaire $M Z = c$, d'inconnue Z , admet une unique solution qu'on exprimera en fonction de M^{-1} et c .
 Dans la suite, cette solution se notera w , on lui associe le polynôme P_w défini comme à la question 2. précédente.
6. Pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, on pose $g(v) = {}^t (b - A v)(b - A v)$.
 (a) Montrer que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) = {}^t b b - {}^t b A v - {}^t v {}^t A b + {}^t v {}^t A A v$ et que $g(w) = {}^t b b - {}^t b A w$; on rappelle que ${}^t A A w = {}^t A b$.
 (b) Montrer que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) - g(w) = {}^t (w - v) {}^t A A (w - v)$.
 (c) En déduire que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) \geq g(w)$ et que $g(v) = g(w)$ si et seulement si $v = w$. On pourra utiliser les questions 2.(b) et 3. précédentes.
7. On muni $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$; montrer que $A w$ est la projection orthogonale de b sur le sous-espace vectoriel $F := \{A v; v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}$. Que représente $g(w)$?
8. Soit $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathcal{P}_m$, on pose $V_P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Calculer les composantes du vecteur $b - A V_P$ et en déduire que $\Phi_m(P) = g(V_P)$.
9. (a) Déduire de ce qui précède que pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Phi_m(P) \geq \Phi_m(P_w)$ avec égalité si et seulement si $P = P_w$.
 (b) Que vaut λ_m ?
10. **Application**
 On prend $n = 3, m = 3, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 1$ et $y_3 = 0$
 (a) Calculer les matrices A et ${}^t A A$.
 (b) Calculer le vecteur ${}^t A b$.
 (c) Résoudre le système linéaire ${}^t A A Z = {}^t A b$, d'inconnue Z , par la méthode du pivot de Gauss.
 (d) Quel est le polynôme P_0 de degré ≤ 3 qui minimise Φ_3 sur \mathcal{P}_3 ? Que vaut λ_3 ? Tracer le graphe de la fonction $t \mapsto P_0(t)$ et représenter les points (x_i, y_i) sur le même graphique.

FIN DE L'ÉPREUVE