

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement  
Supérieur, de la Formation des Cadres  
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2009  
Institut National de Statistique et d'Économie Appliquée  
INSEA

Concours National Commun  
d'Admission aux  
Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées  
Session 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde  
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 3 pages.

L'usage de la calculatrice est **interdit**.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

### Notations

Pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^*{}^2$ , on note  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à  $p$  lignes et  $q$  colonnes ; si  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  ${}^tM$  désigne la matrice transposée de  $M$  et  $\text{rg}(M)$  son rang.

Pour tout entier naturel  $k$ ,  $\mathcal{P}_k$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré  $\leq k$ .

Dans ce problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $x_0, x_1, \dots, x_n$  des réels **deux à deux distincts** ; on note  $\pi$  le polynôme  $\pi = (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_n)$ .

Enfin, pour tout entier naturel  $m$ , on définit l'application

$$\begin{aligned} f_m : \mathcal{P}_m &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

N.B. : La première et la deuxième partie du problème sont indépendantes, la troisième utilise les résultats des deux premières.

### 1<sup>ère</sup> Partie : Étude de l'application $f_m$

Soit  $m$  un entier naturel.

1. Si  $R \in \mathcal{P}_n$  est tel que pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $R(x_i) = 0$ , montrer que  $R$  est le polynôme nul.
2. Vérifier que  $f_m$  est une application linéaire.
3. Dans cette question, on suppose que  $m \geq n + 1$ .

- (a) Montrer que  $\text{Ker } f_m = \{Q\pi ; Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$ .
- (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } f_m$  et  $\mathcal{P}_n$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{P}_m$ .
- (c) En déduire la dimension de  $\text{Ker } f_m$  puis en donner une base.
- (d) Déterminer le rang de  $f_m$  ; l'application  $f_m$  est-elle surjective ?

4. Dans cette question, on suppose que  $m \leq n$ .

- (a) Montrer que  $f_m$  est injective.
- (b) Quel est le rang de  $f_m$  ?
- (c) À quelle condition sur les entiers  $n$  et  $m$  l'application  $f_m$  est-elle surjective ?

5. (a) Montrer que pour tout  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P_y \in \mathcal{P}_n$  tel que  $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ .

- (b) Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on note  $L_i$  l'unique polynôme de  $\mathcal{P}_n$  tel que  $f_n(L_i) = \varepsilon_i$  où  $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; on rappelle que  $\varepsilon_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\varepsilon_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ .
- Vérifier que pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,  $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$  avec  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon.
  - Montrer que la famille  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathcal{P}_n$ .
- (c) Si  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$  est un élément de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , exprimer le polynôme  $P_y$  en fonction de  $L_0, L_1, \dots, L_n$  et  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Que vaut  $\sum_{i=0}^n L_i$ ?

### 2<sup>ème</sup> Partie : Problème aux moindres carrés

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls; on muni l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ ) de son produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ ) et on note  $\|\cdot\|_p$  (resp.  $\|\cdot\|_q$ ) la norme associée. On rappelle que  $\langle u, v \rangle_p = {}^t v u$ ,  $u, v \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ .

Si  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , on note encore  $M$  l'application linéaire de  $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associée à  $M$ ; ainsi  $\text{Ker } M = \{x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}); Mx = 0\}$  et  $\text{Im } M = \{Mx; x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}$ .

On considère  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ; le problème aux moindres carrés associé à  $A$  et  $b$  est la recherche des vecteurs de  $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  minimisant la quantité  $\|b - Ax\|_p^2$  lorsque  $x$  décrit  $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ .

- Si  $u \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  est un vecteur tel que  ${}^t A A u = {}^t A b$ .
  - Montrer que le vecteur  $b - Au$  est orthogonal à  $\text{Im}(A)$  et en déduire que  $Au$  est la projection orthogonale de  $b$  sur  $\text{Im}(A)$ .
  - Justifier que  $\|b - Au\|_p^2 = \min\{\|b - Ax\|_p^2; x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}$  et préciser tous les éléments  $v \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  en lesquels ce minimum est atteint.
- Réciproquement, si  $u \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  est un vecteur qui réalise le minimum de la quantité  $\|b - Ax\|_p^2$  lorsque  $x$  décrit  $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ , prouver que  ${}^t A A u = {}^t A b$ ; on montrera pour cela que le vecteur  ${}^t A A u - {}^t A b$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ .
- Montrer que si  $x \in \text{Ker } {}^t A A$  alors  $\langle Ax, Ax \rangle_p = 0$ .
  - En déduire que  $\text{Ker } A = \text{Ker } {}^t A A$ .
  - Comparer alors  $\text{rg}({}^t A)$  et  $\text{rg}({}^t A A)$ .
  - Montrer que  $\text{Im } {}^t A A \subset \text{Im } {}^t A$  et en déduire que ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.
- Montrer qu'une solution du problème aux moindres carrés cité ci-dessus existe toujours et qu'elle est exactement une solution d'un système linéaire à préciser.
  - Montrer que le problème a une unique solution si et seulement si  $\text{Ker } A = \{0\}$ .

### 3<sup>ème</sup> Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels  $y_0, y_1, \dots, y_n$  qui sont respectivement les images des réels  $x_0, x_1, \dots, x_n$  par une fonction  $\varphi$ , et on cherche à déterminer les polynômes  $P \in \mathcal{P}_m$  tels que la quantité

$$\Phi_m(P) := \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale  $\lambda_m$  de ladite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction  $\varphi$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle de qualité.

On utilise les notations des parties précédentes.

**A. Étude dans le cas  $m \geq n + 1$**

1. Donner un polynôme  $Q_0 \in \mathcal{P}_m$  tel que  $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ .
2. En déduire la valeur minimale  $\lambda_m$  de  $\Phi_m(P)$  lorsque  $P$  décrit  $\mathcal{P}_m$ , et préciser l'ensemble des polynômes en lesquels ce minimum est atteint.

**B. Étude dans le cas  $m \leq n$**

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1, m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1, 1}(\mathbb{R}).$$

1. (a) Expliciter les coefficients de la matrice  ${}^tAA$ .  
 (b) Montrer que la matrice  $A$  est de rang  $m + 1$ ; on pourra montrer que ces colonnes sont linéairement indépendantes ou utiliser une autre méthode.  
 (c) En déduire que la matrice  ${}^tAA$  est inversible.

$$2. \text{ Soit } P = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathcal{P}_m, \text{ on pose } V_P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

- (a) Exprimer le produit  $AV_P$  à l'aide des valeurs prises par  $P$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .  
 (b) En déduire que  $\Phi_m(P) = \|b - AV_P\|_{n+1}^2$ .
3. (a) Justifier qu'il existe un unique polynôme  $P_0 \in \mathcal{P}_m$  qui réalise le minimum de la quantité  $\Phi_m(P)$  lorsque  $P$  décrit  $\mathcal{P}_m$ .  
 (b) Montrer que  $V_{P_0}$  est l'unique solution du système linéaire  ${}^tAAZ = {}^tAb$ , d'inconnue  $Z$ .  
 (c) Que vaut  $\lambda_m$ ?

**4. Application**

On prend  $n = 3, m = 3, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 1$  et  $y_3 = 0$

- (a) Calculer les matrices  $A$  et  ${}^tAA$ .
- (b) Calculer le vecteur  ${}^tAb$ .
- (c) Résoudre le système linéaire  ${}^tAAZ = {}^tAb$ , d'inconnue  $Z$ , par la méthode du pivot de Gauss.
- (d) Quel est le polynôme  $P_0$  de degré  $\leq 3$  qui minimise  $\Phi_3$  sur  $\mathcal{P}_3$ ? Que vaut  $\lambda_3$ ?
- (e) Tracer le graphe de la fonction  $t \mapsto P_0(t)$  et représenter les points  $(x_i, y_i)$  sur le même graphique.

FIN DE L'ÉPREUVE