

Exercice

1. (a) La fonction $h : (x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et la fonction φ est de classe C^2 sur \mathbb{R} , donc la fonction $g = \varphi \circ h$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
- (b) • $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \varphi' \left(\frac{y}{x} \right)$
 • $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \varphi' \left(\frac{y}{x} \right)$
- (c) • $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{y^2}{x^4} \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{2y}{x^3} \varphi' \left(\frac{y}{x} \right)$
 • $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2} \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right)$

2. On remarque que

$$((1 + t^2)x')' = (1 + t^2)x'' + 2tx'$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, ((1 + t^2)x')' = t &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, (1 + t^2)x'(t) = \frac{t^2}{2} + \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, x'(t) = \frac{1}{2} \frac{t^2}{1 + t^2} + \frac{\lambda}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) + \frac{\lambda}{t^2 + 1} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \frac{1}{2}(t - \arctan(t)) + \lambda \arctan(t) + \mu \end{aligned}$$

En posant $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, on obtient la solution générale sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (2) :

$$x(t) = \frac{t}{2} + \alpha \arctan(t) + \mu \quad \text{où } (\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3. (a) On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{y^2}{x^4} + \frac{1}{x^2} \right) \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{2y}{x^3} \varphi' \left(\frac{y}{x} \right)$

Si g vérifie (2) alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \left(\frac{y^2}{x^4} + \frac{1}{x^2} \right) \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{2y}{x^3} \varphi' \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y}{x^3}$$

En multipliant par x^2 qui est non nul, on obtient alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right) \varphi'' \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{2y}{x} \varphi' \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y}{x}$$

Pour $x = 1$ et $y = t$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}, (t^2 + 1)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = t$

Ainsi φ est bien une solution de l'équation différentielle (1)

Remarque

Lorsque x décrit \mathbb{R}^* et y décrit \mathbb{R} , alors $t = \frac{y}{x}$ décrit \mathbb{R} , donc on a même équivalence entre g vérifie (2) et φ vérifie (1)

(b) D'après 3)a) φ vérifie (1) , donc d'après la question 2), il existe $(\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{t}{2} + \alpha \arctan(t) + \mu$$

$$\text{Et donc, } \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, g(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{2x} + \alpha \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \mu$$

(c) **Première méthode**

On prend $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par l'expression trouvée en 3)b) et on vérifie par le calcul que g vérifie (2).

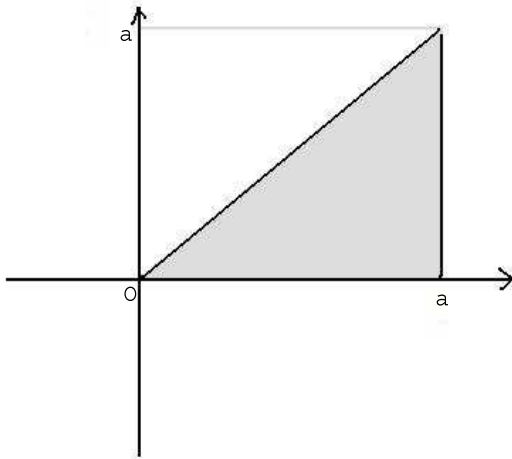
Deuxième méthode

D'après la remarque faite à la question 3)a) les fonctions g trouvées dans 3)b) vérifient bien (2) .

Problème

1 ère partie

1. $\mathcal{C}(a)$ est le carré $[0, a] \times [0, a]$ et $\Delta(a)$ est le triangle hachuré en gris.



2. La fonction $f : [0, a] \times [0, a] \rightarrow e^{-x^2-y^2}$ est continue sur $[0, a] \times [0, a]$ donc:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}(a)} f(x, y) dx dy &= \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^a e^{-x^2} \left(\int_0^a e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^a e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_0^a e^{-t^2} dt \right)^2 \end{aligned}$$

3. Le compact $\Delta(a)$ peut être défini par

$$\Delta(a) : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \text{ ou } \Delta(a) : \begin{cases} 0 \leq y \leq a \\ y \leq x \leq a \end{cases}$$

D'après le théorème de Fubini :

$$\int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \iint_{\Delta(a)} f(x,y) dx dy = \int_0^a \left(\int_y^a e^{-x^2-y^2} dx \right) dy$$

En changeant les noms de x et de y on obtient

$$\int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_x^a e^{-x^2-y^2} dx \right) dy$$

4. (a)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}(a)} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2} dy + \int_x^a e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2} dy \right) dx + \int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \quad (\text{D'après 3)a}) \\ &= 2 \int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2} dy \right) dx \\ &= 2 \iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2} dx dy \end{aligned}$$

5. (a) On passe en coordonnées polaires.

Soit $\varphi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Comme $\Delta(a)$ est incluse dans le premier cadran, on prend $r \in [0, +\infty[$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a alors

$$(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Delta(a) \iff \begin{cases} 0 \leq r \cos \theta \leq a \\ 0 \leq r \sin \theta \leq r \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{Donc si } r \neq 0 \text{ alors } (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Delta(a) \iff \begin{cases} 0 < r \leq \frac{a}{\cos \theta} \\ 0 \leq \tan \theta \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < r \leq \frac{a}{\cos \theta} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{D}(a) = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{a}{\cos \theta}\}$ alors $\varphi(\mathcal{D}(a)) = \Delta(a)$

$$\text{Le jacobien de } \varphi \text{ en } (r, \theta) \text{ est } \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

D'après la formule de changement de variable on a:

$$\iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{\mathcal{D}(a)} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} r e^{-r^2} dr \right) d\theta$$

$$(b) \text{ On a } \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} r e^{-r^2} dr = \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\frac{a}{\cos \theta}} = \frac{1 - e^{-\frac{a^2}{\cos^2 \theta}}}{2}$$

$$\text{Donc } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2 \theta}} d\theta \right)$$

Et d'après 2) et 3)b)

$$\iint_{\mathcal{C}(a)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_0^a e^{-t^2} dt \right)^2 = 2 \iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2 \theta}} d\theta$$

(c) $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], 0 \leq \frac{-a^2}{\cos^2 \theta} \leq -a^2$, donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2 \theta}} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a^2} d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-a^2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$, on déduit de l'inégalité précédente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}} d\theta = 0$

6. La fonction $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, de plus d'après les questions 4)b) et

$$4)c) \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\pi}{2} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Donc h est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

7. La fonction $g : t \mapsto t^2 e^{-t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors une intégration par partie donne

$$\int_0^x t^2 e^{-t^2} = \left[-t \frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Ce qui prouve l'intégrabilité de g sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

8. (a) La fonction $k : t \mapsto \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, de plus :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(t) = 1$, donc k est prolongeable par continuité en 0, donc k est intégrable sur $]0, 1[$
- $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq k(t) \leq \frac{1}{t^2}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc k est intégrable sur $[1, +\infty[$

En conclusion k est bien intégrable sur $]0, +\infty[$

(b) Soit $(\varepsilon, x) \in]0, +\infty[$ tel que $\varepsilon < x$. On intègre par partie sur $[\varepsilon, x]$ en posant

$u' = \frac{1}{t^2}$ et $v = 1 - e^{-t^2}$, on obtient alors :

$$\int_{\varepsilon}^x k(t) dt = \left[-\frac{1 - e^{-t^2}}{t} \right]_{\varepsilon}^x + 2 \int_{\varepsilon}^x e^{-t^2} dt$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ on obtient $\int_0^{+\infty} k(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

$$\text{D'où } \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Deuxième Partie

Quelques résultats préliminaires

1. (a) La fonction \ln est concave sur $]0, +\infty[$, donc sa courbe est au dessous de ses tangentes.

Comme la tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$ alors

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$$

(b) Soient $n \geq 1$ et $u \in [0, n]$

En appliquant le résultat de a) à $x = e^{-u/n}$ on obtient $-\frac{u}{n} \leq e^{-u/n} - 1$, d'où $0 \leq 1 - \frac{u}{n} \leq e^{-u/n}$.

Et en utilisant la croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}^+ on obtient $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$

ou encore $e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \geq 0$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x > 0$ et d'après 1)a) on a $\ln(e^x) \leq e^x - 1$

D'où $e^x \geq x + 1$

(b) Soit $t \in [0, 1]$

D'après 2)a) on a $e^t \geq 1 + t$

En multipliant par $(1-t)$, qui est positif, et en utilisant encore une fois la croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on obtient

$$(1-t)^n e^{nt} \geq (1-t^2)^n$$

(c) En posant $x = t^2$, l'inégalité demandée est équivalente à $\forall x \in [0, 1], (1-x)^n \geq 1 - nx$

Si $n = 1$, l'inégalité est triviale

Si $n \geq 2$, soit $h : x \mapsto (1-x)^n$, alors h est C^2 sur $[0, 1]$ et

$\forall x \in [0, 1], h''(x) = n(n-1)(1-x)^{n-2} \geq 0$, donc h est convexe sur $[0, 1]$ et sa tangente à l'origine a pour équation $y = 1 - nx$, donc $\forall x \in [0, 1], h(x) \geq 1 - nx$
 c.à.d $\forall x \in [0, 1], (1-x)^n \geq 1 - nx$

(d) D'après 2)b) et 2)c) on a $\forall t \in [0, 1], \forall n \geq 1, (1-t)^n e^{nt} \geq 1 - nt^2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, n]$, alors $t = \frac{u}{n} \in [0, 1]$

Donc $(1 - \frac{u}{n})^n e^u \geq 1 - \frac{u^2}{n}$ puis $(1 - \frac{u}{n})^n \geq (1 - \frac{u^2}{n})e^{-u}$ et par suite $e^{-u} - (1 - \frac{u}{n})^n \leq \frac{u^2}{n} e^{-u}$

B. Intégrales de Wallis

1. (a) $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$,

L'application $t \rightarrow \cos^n t$ est continue positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et non identiquement nulle donc $I_n > 0$.

(b) Une intégration par parties donne

$$I_n = [\sin t \cos^{n-1} t]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{n-2} t dt. \text{ D'où :}$$

$$I_n = (n-1) \left(\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t dt \right)$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n), \text{ d'où}$$

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

(c) Posons pour $n \geq 1, J_n = nI_n I_{n-1}$, on a alors

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, nI_n &= (n-1)I_{n-2} \Rightarrow nI_n I_{n-1} = (n-1)I_{n-2} I_{n-1} \\ &\Rightarrow J_n = J_{n-1} \end{aligned}$$

Donc la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est constante et $\forall n \geq 1, J_n = J_1 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

On a donc $\forall n \geq 1, nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \leq I_n$

(b) Soit $n \geq 1$ alors compte tenu de la décroissance et la positivité de (I_n) on a

$$nI_n^2 \leq nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2} = (n+1)I_n I_{n+1} \leq (n+1)I_n^2$$

$$\text{D'où l'encadrement } \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

3. (a) D'après 1)b), pour $n \geq 1, I_{2n} = \frac{(2n-1)}{2n} I_{2(n-1)}$

$$\text{Et par une récurrence simple on obtient : } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 1}{(2n)(2n-2) \dots 2} I_0.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

(b) D'après la question B.2.b on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \leq I_{2n} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} &\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{\pi}{2}\lambda_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})}} \leq \lambda_n \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} \leq \lambda_n\sqrt{n\pi} \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leq 1 - \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Or $1 - \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \frac{n}{n+\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{2n+1+2\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}} \leq \frac{1}{4n}$

D'où $0 \leq 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leq \frac{1}{4n}$

(c) D'après b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \lambda_n\sqrt{n\pi}) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n\sqrt{n\pi} = 1$

Et par suite $\lambda_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$

C. Deux suites de polynômes approchant uniformément la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$

1. (a) Soit $n \geq 1$, et $u : t \mapsto \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t^2}$ alors

- u est continue sur $]0, 1]$

- lorsque t tend vers 0 on a $(1 - t^2)^n = 1 - nt^2 + o(t^2)$, donc $u(t) = n + o(1)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = n$

Ainsi u est prolongeable par continuité en 0 et par suite elle est intégrable sur $]0, 1]$

(b) D'après la formule du binôme de Newton on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - (1 - t^2)^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} t^{2k}.$$

$$\text{Et } \forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t^2} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} t^{2k-2}$$

On a alors pour $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$:

$$\int_0^x \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t^2} dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \int_0^x t^{2k-2} dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$$

$$\text{D'où } \lambda_n x \int_0^x \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t^2} dt = \lambda_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} x^{2k} = P_n(x)$$

(c) Le changement de variable $t = \frac{ux}{\sqrt{n}}$, donne

$$\int_0^x \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t^2} dt = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1 - (1 - \frac{u^2 x^2}{n})^n}{u^2} du$$

$$\text{D'où } P_n(x) = \lambda_n \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1 - (1 - \frac{u^2 x^2}{n})^n}{u^2} du$$

2. On effectue le changement de variable $t = u|x|$ pour se ramener à l'intégrale calculée dans la question I.7.b)

$$\text{On obtient } \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^2} du = |x| \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt = |x| \sqrt{\pi}$$

3. (a) D'après 2) on a pour $x \in]0, 1]$, $x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^2} du$

Et d'après 1)c) on a

$$\begin{aligned}
P_n(x) - x &= \lambda_n \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1 - \left(1 - \frac{u^2 x^2}{n}\right)^n}{u^2} du - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^2} du \\
&= \lambda_n \sqrt{n} \Delta_n(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Delta(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\lambda_n \sqrt{n\pi} \Delta_n(x) - \Delta(x) \right)
\end{aligned}$$

La relation précédente s'écrit également

$$P_n(x) - x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\lambda_n \sqrt{n\pi} (\Delta_n(x) - \Delta(x)) - (1 - \lambda_n \sqrt{n\pi}) \Delta(x) \right)$$

Donc par inégalité triangulaire:

$$|P_n(x) - x| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\lambda_n \sqrt{n\pi} |\Delta_n(x) - \Delta(x)| + |1 - \lambda_n \sqrt{n\pi}| \Delta(x) \right)$$

Et d'après la question on a: $0 \leq 1 - \lambda_n \sqrt{n\pi} \leq \frac{1}{4n}$ et $\lambda_n \sqrt{n\pi} \leq 1 \leq 1 + \frac{1}{4n}$. (! ! !)

D'où $|P_n(x) - x| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right) |\Delta_n(x) - \Delta(x)| + \frac{1}{4n} \Delta(x) \right)$

(b) D'après la relation de chasles sur Δ

$$\Delta(x) - \Delta_n(x) = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\left(1 - \frac{u^2 x^2}{n}\right)^n - e^{-u^2 x^2}}{u^2} du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^2} du$$

$$\text{Donc } |\Delta(x) - \Delta_n(x)| \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\left| e^{-u^2 x^2} - \left(1 - \frac{u^2 x^2}{n}\right)^n \right|}{u^2} du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{|1 - e^{-u^2 x^2}|}{u^2} du$$

Or $\forall u \in \mathbb{R}, 1 - e^{-u^2 x^2} \geq 0$

Et $\forall u \in [0, \sqrt{n}], 0 \leq u^2 x^2 \leq u^2 \leq n$, (car $x \in]0, 1[$), d'où $u^2 x^2 \in [0, n]$ il en résulte d'après A.1)b) et A.2)d) de la deuxième partie que

$$\forall u \in [0, \sqrt{n}], 0 \leq e^{-u^2 x^2} - \left(1 - \frac{u^2 x^2}{n}\right)^n \leq \frac{u^4 x^4}{n} e^{-u^2 x^2}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
|\Delta(x) - \Delta_n(x)| &\leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2 x^2} - \left(1 - \frac{u^2 x^2}{n}\right)^n}{u^2} du + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^2} du \\
&\leq \frac{x}{n} \int_0^{\sqrt{n}} (ux)^2 e^{-(ux)^2} d(ux) + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du \\
&\leq \frac{x}{n} \int_0^{+\infty} (ux)^2 e^{-(ux)^2} d(ux) + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du \\
&\leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + \left[\frac{-1}{u} \right]_{\sqrt{n}}^{+\infty} \\
&\leq \frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{Car } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right)
\end{aligned}$$

(c) D'après 3)a) $|P_n(x) - x| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right) |\Delta_n(x) - \Delta(x)| + \frac{1}{4n} \Delta(x) \right)$

Or

- D'après 3)b) $|\Delta_n(x) - \Delta(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$
- D'après 2) $\Delta(x) = x\sqrt{\pi}$, donc $\Delta(x) \leq \sqrt{\pi}$

Donc

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, 1[, |P_n(x) - x| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4n} \right) \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) + \frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

Cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$ car $P_n(0) = 0$

$$\text{Donc } \sup_{x \in [0,1]} |P_n(x) - x| \leq \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}.$$

La fonction $t \mapsto P_n(t) - |t|$ est clairement paire, donc :

$$\sup_{t \in [-1,1]} |P_n(t) - |t|| = \sup_{x \in [0,1]} |P_n(x) - x| \leq \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$$

(d) On pose $\varepsilon_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) + \frac{1}{4n}$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ donc d'après 3)c)}$$

$$\sup_{t \in [-1,1]} |P_n(t) - |t|| \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty$$

D'où la convergence uniforme de la suite de fonctions $(P_n)_{n \geq 1}$ vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$

$$1 + \frac{1}{4n} = O(1), \quad \frac{1}{4n} + \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } \frac{1}{4n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{Donc } \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} Q_n(x) - P_n(x) &= \lambda_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{2k}{2k-1} - \frac{1}{2k-1} \right) X^{2k} \\ &= \lambda_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} X^{2k} \\ &= -\lambda_n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-x^2)^k = -\lambda_n (1 - (1 - x^2)^n) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in [-1, 1], |Q_n(x) - P_n(x)| = \lambda_n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-x^2)^k = \lambda_n (1 - (1 - x^2)^n) \leq \lambda_n$$

$$\text{Et par suite } \|Q_n - P_n\|_\infty \leq \lambda_n \rightarrow 0 \text{ car } \lambda_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Donc $\|Q_n - |\cdot|\|_\infty \leq \|Q_n - P_n\|_\infty + \|P_n - |\cdot|\|_\infty \rightarrow 0$ (d'après 3)d)), d'où la convergence uniforme de (Q_n) vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

$$\text{De plus } \lambda_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \text{ donc } \lambda_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } \|Q_n - P_n\|_\infty \leq \lambda_n \text{ donc } \|Q_n - P_n\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{et d'après 3)d) } \|P_n - |\cdot|\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ donc } \|Q_n - |\cdot|\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$