Partie III : Une équation intégrale

5. Soit F l'espace vectoriel des applications bornées de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f dans F on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|.$$

On note aussi E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer soigneusement que $\| \|_\infty$ est une norme sur F. On admettra pour la suite que $(F, \| \|_\infty)$ est un espace de Banach.

(b) Vérifier que $E \subset F$.

(c) Démontrer le résultat suivant du cours :
si $(G, \| \|)$ est un espace vectoriel normé et si (g_n) est une suite d'applications continues de G dans G qui converge uniformément sur G vers une application g alors g est continue.

(d) En déduire que $(E, \| \|_\infty)$ est aussi un espace de Banach.

6. On considère une application continue $K : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ ainsi que $g \in E$. Pour λ réel, on note Φ l'application qui à une fonction f de E associe la fonction définie par :

$$\Phi(f)(x) = g(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [0;1].$$

(a) Justifier que l'application $|K|$ est bornée et atteint ses bornes.
On pose $M = \max\limits_{(x,y)\in[0;1]^2} |K(x,y)|$.

(b) Démontrer que $\Phi(f)$ est un élément de E.

(c) On suppose que $|\lambda| < M^{-1}$. Vérifier que Φ est une contraction stricte de $(E, \| \|_\infty)$ et en déduire qu'il existe une unique application f dans E telle que :

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [0;1].$$

Partie IV : Une application géométrique

7. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère un vrai triangle ABC avec B et C sur l'axe des abscisses.
Soit M un point de l'axe des abscisses. On note :
   - P_M le projeté orthogonal de M sur (CA) ;
   - Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
   - R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC).

On obtient donc une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M.
On appelle a, b et c les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

(a) Pour M et M' points distincts de (BC), justifier l'égalité (lorsque $M \neq C$) :

$$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c|$$

(b) Démontrer que φ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}, | |)$. Que peut-on en déduire ?

Fin de l'énoncé

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $]-1;1[$.

Exercice 2

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Dans la suite de cet exercice, on se propose de calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt.$$

(a) Démontrer que les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.

(b) Prouver que pour tout x réel positif on a : $f(x) = \int_0^1 x\,e^{-x^2t^2}\,dt$.

En déduire que la fonction $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\frac{\pi}{4}$.

(c) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ réel on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}$.

(d) En déduire la valeur de I.

Problème : Théorème du point fixe et applications

Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe de Picard, ce qui fait l'objet de la partie I, et d'en voir plusieurs applications élémentaires dans les parties suivantes. Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.

Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé.

Une définition. Soit $k \in [0;1[$. On dira qu'une application $f : E \to E$ est une **contraction stricte** de rapport k lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,\|x - y\|.$$

Une notation. Pour n entier naturel et $f : E \to E$, on notera $f^n : E \to E$ l'application définie par :

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois la fonction } f}(x) \quad \text{avec la convention} \quad f^0 = \mathrm{Id}.$$

Partie I : Le théorème du point fixe de Picard

Dans cette partie $(E, \| \|)$ est un espace de Banach et $f : E \to E$ est une contraction stricte de rapport k.

Pour $a \in E$ on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier naturel.

1. Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = x_{n+1} - x_n$.

(a) Démontrer que pour tout n entier naturel, on a $\|u_{n+1}\| \leqslant k\,\|u_n\|$ puis que

$$\|u_n\| \leqslant k^n\,\|f(a) - a\|.$$

En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

(b) Démontrer alors que la suite (x_n) converge vers un vecteur ℓ de E.

(c) Prouver que ℓ est un point fixe de f c'est-à-dire que $f(\ell) = \ell$.

(d) Démontrer que f admet en fait un unique point fixe.

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

<u>Théorème du point fixe de Picard</u> : Dans un espace de Banach $(E, \| \|)$, une application $f : E \to E$ qui est une contraction stricte admet un unique point fixe et pour tout a dans E la suite des itérés $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

Partie II : Exemples et contre-exemples

2. **Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte**

On considère ici la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

(a) Démontrer que pour tout t réel, on a $|g'(t)| < 1$. En déduire que l'on a pour x et y réels :

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

(b) La fonction g admet-elle un point fixe ? Est-elle une contraction stricte ?

3. **Un exemple**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout x réel, on ait :

$$f(x) = f \circ g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{x}{5} + 1.$$

(a) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 1$ pour tout n entier naturel. Démontrer en utilisant le théorème de Picard que cette suite converge vers un réel ℓ que l'on précisera.

(b) Démontrer que pour tout n entier naturel et tout x réel, on a : $f(g^n(x)) = f(x)$.

(c) En déduire que f est constante.

4. **Un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$**

On s'intéresse dans cette question au système :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} 4x & = & \sin(x+y) \\ 3y & = & 3 + 2\arctan(x-y) \end{array}\right.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \|_1$ définie par : $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ et on considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

(a) Pourquoi l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$ est-il complet ?

(b) Démontrer que pour tout a et b réels, on a :

$$|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a| \quad \text{et} \quad |\arctan b - \arctan a| \leqslant |b - a|.$$

(c) Prouver que ψ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$.

(d) En déduire que le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

(e) Ici $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\| \|_\infty$ définie par $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ qui en fait un espace de Banach.

Déterminer $\left\|\psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0,0)\right\|_\infty$.

L'application ψ est-elle encore une contraction stricte pour la norme $\| \|_\infty$?

Quel commentaire peut-on faire ?